Mat-023 . Tarea 2

(1) $f(x,y,z) = z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2$, $S = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 1\}$ (30 pts.)

a) Plano tangente en $(0, 2+1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

analogo

2 pts

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\left((x^2+y^2)^{1/2}-2\right)\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-1/2}\cancel{2}x = \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-2)2x}{\sqrt{x^2+y^2}} , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-2)2y}{\sqrt{x^2+y^2}} , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$$\Rightarrow \nabla f(0, 2+1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(2+1/\sqrt{2}-2)\,2\cancel{(y)}}{\cancel{(y)}} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$ 2 pts

Ecuación plano: $$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-2-1/\sqrt{2} \\ z-1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \sqrt{2}(y-2-1/\sqrt{2}) + \sqrt{2}(z-1/\sqrt{2}) = 0$$ 2 pts

$$y - 2 - 1/\sqrt{2} + z - 1/\sqrt{2} = 0$$

$$\boxed{y + z = 2 + \sqrt{2}}$$ 1 pt.

Plano tangente en $(0,1,0)$

$$\nabla f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1-2)2}{1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 2 pt.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2(y-1) = 0$$ 2 pt.

$$\boxed{y = 1}$$ 1 pt

b) Plano $x=0$ (plano yz)

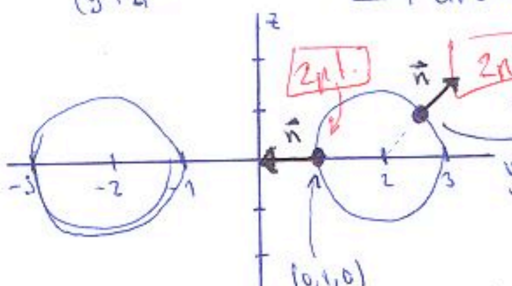
$$x=0\ ,\ f(x,y,z)=1 \Rightarrow z^2+\left(\sqrt{y^2}-2\right)^2=1$$

$$\Rightarrow z^2+\left(|y|-2\right)^2=1 \quad \boxed{2\,pt.}$$

$$\begin{cases} \cdot\ y>0 \Rightarrow z^2+(y-2)^2=1 \longrightarrow \text{circunf. } r=1,\ \text{centro}=(0,2,0) \quad \boxed{2\,pt.} \\ \cdot\ y<0 \Rightarrow z^2+\underbrace{(-y-2)^2}_{(y+2)^2}=1 \Rightarrow z^2+(y+2)^2=1 \end{cases}$$

(con dibujo)

$\hookrightarrow$ circunf. $\underline{r=1}$, centro $=(0,-2,0)$ $\boxed{2\,pt}$



$$\nabla f\left(0,2+1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$(0,1,0)$

$$\nabla f(0,1,0)=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

---

c) Plano xz $(y=0)$

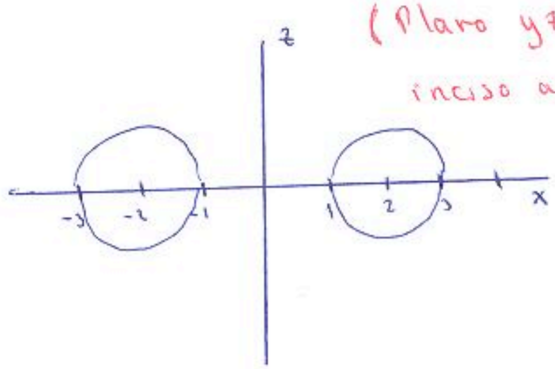
$$\Rightarrow z^2+\left(\sqrt{x^2}-2\right)^2=1$$

$$\Rightarrow z^2+(|x|-2)^2=1$$

$\cdot\ x>0 \Rightarrow z^2+(y-2)^2=1$

$\cdot\ x<0 \Rightarrow z^2+(y+2)^2=1$

(Plano yz en el inciso anterior)

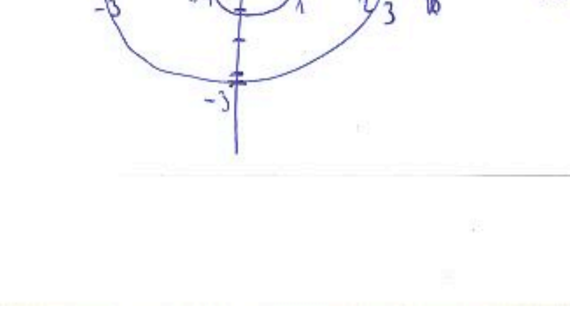


Plano xy $(z=0)$

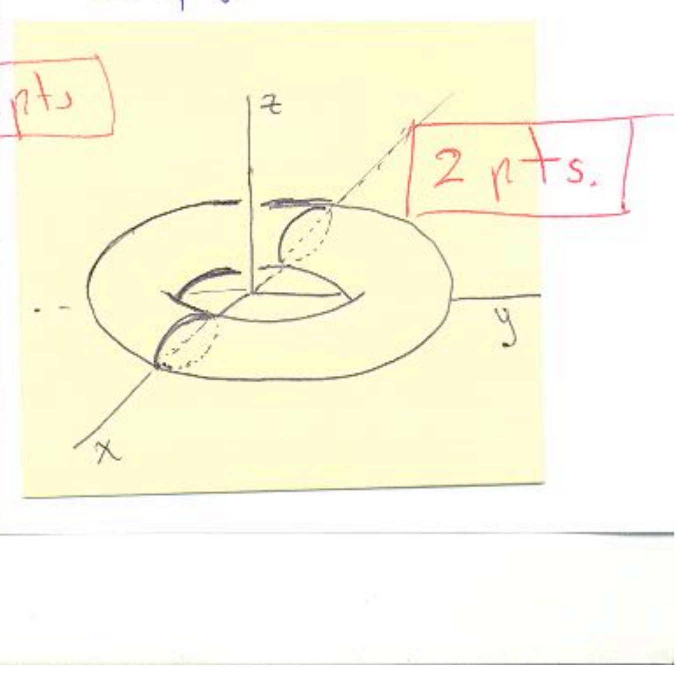
$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2=1 \quad \boxed{2\,pt.}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2\pm1=\begin{cases}1 \to \text{circunf. } r=1\\ 3 \to \text{circunf. } r=3\end{cases} \quad \boxed{2\,pts}$$

(centro $=(0,0)$)



Bosquejo de S:



2. Defina la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy-2y}{y+\sqrt{y^2+(x-2)^2}} & \text{si } (x,y)\neq(2,y)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(2,y)\end{cases}$$

a) Determine si f es diferenciable en $(2,1)$. En tal caso encuentre la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1,f(2,1))$.

b) Determine si $H(x,y)=(\operatorname{sen}(x^2+y^3), f(x,y))$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifique.

Solución: a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x,1)-f(2,1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\Delta x^2}}=1/2$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(2,1+\Delta y)-f(2,1)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0$ 2P

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left|f(2+\Delta x,1+\Delta y)-f(2,1)-\frac{\Delta x}{2}\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=$$ 5P

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left\{\underbrace{\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}_{\text{función Acotada}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\left|1+\Delta y-\sqrt{1+(\Delta x)^2+2\Delta y+(\Delta y)^2}\right|}{\left|1+\Delta y+\sqrt{(\Delta x)^2+(1+\Delta y)^2}\right|}}_{\text{límite cero}}\right\}=0.$$

La función es diferenciable en el punto $(2,1)$.--

La ecuación del plano tangente:

$z=\frac{1}{2}(x-2)+0(y-1)+0$ ------- 5P

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x,y)-f(2,y)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y}{y+\sqrt{y^2+(\Delta x)^2}}=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } y>0\\ 0 & \text{si } y=0\\ \infty & \text{si } y<0.\end{cases}$ --- 5P

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(2,y+\Delta y)-f(2,y)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0.$

Entonces, $f(x,y)$ no es diferenciable en los puntos $(2,y)$ con $y<0$. ------ 3P

La función $H(x,y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ cada función componente es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. como $f(x,y)$ no es diferenciable en $(2,y)$, $y<0$ $\Longrightarrow$ $H(x,y)$ no es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. -- 2P --3P

③ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^3+y^2} & x^3+y^2\neq 0 \\ 0 & x^3+y^2=0\end{cases}$ (20 pts)

a) $\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{0}{h} = 0 \Rightarrow f_x(0,0)=0$ (4 pts)

y análogamente $f_y(0,0)=0$

Para ver si f es diferenciable en $(0,0)$:

$$\frac{f(x,y)-\overset{0}{f(0,0)}-\cancel{f_x(0,0)}(x-0)-\overset{0}{f_y(0,0)}(y-0)}{\|(x,y)\|} = \frac{\frac{xy^2}{x^3+y^2}}{\|(x,y)\|} = \frac{xy^2}{(x^3+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$ (5 pts)

en la curva $y=x$ se tiene

$$\left|\frac{xy^2}{(x^3+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{x^3}{\sqrt{2}(x^3+x^2)|x|}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{x+1}\right| \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$ (3 pts)

$\Rightarrow f$ no es dif. en $(0,0)$.

b) Sea (x_0,y_0) tal que $x^3+y^2=0$ (2 pts)

$$\Rightarrow f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-\overset{0}{f(x,y)}}{h}$$

$$=\lim \frac{1}{h}\frac{(x+h)y^2}{(x+h)^3+y^2} = \lim\left(\frac{1}{h}\,\frac{xy^2+hy^2}{\underbrace{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+y^2}_{x^3+y^2=0}}\right)$$ (2 pts)

$$=\lim\frac{\overbrace{xy^2+hy^2}^{\to\, xy^2\neq 0}}{3x^2h^2+3xh^3+h^4} \longrightarrow \infty \quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)$$ (2 pts)

$\Rightarrow f_x$ no está definida $\forall (x,y)\neq(0,0)$ ((x,y) en la curva) (2 pts)

$\therefore f_x$ no es continua en ningún punto.

4. Dada una función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, considere la ecuación dada por $2x - xy + xz^2 = f(x+z, y+xz)$

a) Dar condiciones para f que garanticen la existencia de una función $z = z(x,y)$ en una vecindad del punto $(1,2,3)$.

b) Bajo las condiciones anteriores, encontrar $z_x(1,2)$.

Solución: consideremos la función $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida

a) por $F(x,y,z) = 2x - xy + xz^2 - f(x+z, y+xz)$ --- 2p

(1) $F(1,2,3) = 9 - f(4,5) = 0 \iff f(4,5) = 9$ --- 2p

(2) F tiene derivadas parciales continuas en una vecindad del punto $(1,2,3) \iff$ f tiene derivadas parciales continuas en una vecindad de $(1,2,3)$ ---- 3p

(3) $$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,2,3)} = 2xz - \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\cdot 1 - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot x \Big|_{(1,2,3)}, \quad u = x+z,\ v = y+xz$$

$$= 6 - \frac{\partial f}{\partial u}(4,5) - \frac{\partial f}{\partial v}(4,5) \neq 0$$

$$\iff \frac{\partial f}{\partial u}(4,5) + \frac{\partial f}{\partial v}(4,5) \neq 6.$$ --- 5p.

Bajo las condiciones (1), (2) y (3) la ecuación $F(x,y,z)=0$ puede resolverse para z en términos de x e y en una vecindad del punto $(1,2)$, la solución $z = z(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas y: --- 5p

b) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2 - y + z^2 - \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot z}{6 - \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot x}$$ --- 5p

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = -\frac{9 - \frac{\partial f}{\partial u}(4,5) - 3\frac{\partial f}{\partial v}(4,5)}{6 - \frac{\partial f}{\partial u}(4,5) - \frac{\partial f}{\partial u}(4,5)}$$ --- 3p