Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Quinta Tarea MAT – 023
8 de mayo de 2009

1. Encuentre la velocidad de escape para un cuerpo proyectado hacia arriba con una velocidad inicial v_0 desde un punto $x_0 = \xi R$ sobre la superficie de la tierra, donde R es el radio de la tierra y ξ es una constante. No tome en cuenta la resistencia del aire. Encuentre la altitud inicial desde la cual el cuerpo debe ser lanzado para reducir la velocidad de escape al 85 % de su valor en la superficie de la tierra.

   Solución. Sea m la masa del cuerpo, M la masa de la Tierra, por la segunda Ley de Newton y la Ley de gravitación universal, tenemos:
$$mx'' = \frac{GMm}{x^2}, \quad x'(0) = v_0, \quad x(0) = \xi R. \qquad (\textbf{40 puntos})$$
   Cumpliéndose $\frac{GM}{R^2} = g$, entonces:
$$x'' = -GMx^{-2},$$
$$2x'x'' = -2GMx^{-2}x',$$
$$(x')^2 - v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\xi R}\right), \qquad (\textbf{20 puntos})$$
   Si $x \to \infty$, lo cual significa que el cuerpo puede escapar, tenemos:
$$(x')^2 - v_0^2 = \frac{-2GM}{\xi R},$$
$$v_0^2 = (x')^2 + \frac{2GM}{\xi R} \geq \frac{2GM}{\xi R}, \qquad (\textbf{20 puntos})$$
   acá observamos que la velocidad de escape en la superficie de la tierra es $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$.
   Para que la velocidad de escape se reduzca al 85 % del valor en la superficie de la tierra, se debe de cumplir que:
$$\frac{2GM}{\xi R} = \left(\frac{85}{100}\right)^2 \left(\frac{2GM}{R}\right),$$
   obteniéndose,
$$\xi = \frac{400}{289}, \qquad (\textbf{20 puntos})$$
   y, la altitud inicial debe ser $(\frac{400}{289} - 1)R = \frac{111}{289}R$.
2. Considere la ecuación:

(1) $$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2.$$

   a) Suponga que $y_1(x)$ es solución particular de (1). Demuestre que $y(x) = u(x) + y_1(x)$ es solución de (1), donde $u = u(x)$ no nula (¿qué pasa si $u = 0$?) satisface la siguiente ecuación de primer orden:

(2) $$u' = (b(x) + 2c(x)y_1(x))\, u + c(x)u^2.$$

Coordinación MAT–023/jcc. Fecha de entrega: 6 de mayo de 2009.

b) Resuelva $y' = x + \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}$.

Solución.

a) Si $u = 0$ el hecho es trivial pues $y_1(x)$ es solución (**10 puntos**). Si $u \neq 0$, entonces al reemplazar

$$u' + y_1' = a(x) + b(x)u + b(x)y_1 + c(x)u^2 + 2c(x)y_1 u + c(x)y_1^2.$$

Agrupando, es claro que el término $y_1' - a(x) - b(x)y_1 - c(x)y_1^2 = 0$ pues y_1 es solución de (1) (**25 puntos**). Lo que resta es

$$u' = (b(x) + 2c(x)y_1(x))\,u + c(x)u^2,$$

que es lo pedido (**25 puntos**).

b) La ecuación sugiere una solución particular $y_1(x) = c/x$. Al reemplazar, sigue que $c = -2$. Usando el inciso anterior se llega a la ecuación del tipo Bernoulli

$$u' = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}\right)u + \frac{u^2}{2}, \qquad (\textbf{30 puntos})$$

cuya solución es (**10 puntos**):

$$u(x) = x^2 e^{-\frac{x^3}{6}}\left(c - \frac{1}{2}\int \frac{e^{x^3/6}}{x^2}\,dx\right), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

3. Sea $\mathbb{P}_2[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a 2. Sea $A : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que satisface lo siguiente: $A(1) = (1,2,0)$; $A(x) = (b-1, b-1, 1)$ y $A(x^2) = (1, 2, b/2)$, donde $b \in \mathbb{R}$.

a) Determine $\mathrm{Ker}(A)$.

b) Calcule la dimensión de $\mathrm{Im}(A)$.

c) ¿Para qué valores de $b \in \mathbb{R}$ es A un isomorfismo?

Solución.

a) Sea $p(x) \in \mathrm{Ker}(A)$. Como $p(x) \in \mathbb{P}_2[x]$, su forma es $p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$, con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Luego, $A(p(x)) = (0,0,0)$ y se llega al sistema lineal homogéneo para a_1, a_2, a_3:

$$\begin{aligned} a_1 + (b-1)a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + (b-1)a_2 + 2a_3 &= 0 \qquad (\textbf{10 puntos}) \\ a_2 + \frac{b}{2}a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Desde el punto de vista matricial esto equivale a:

$$\begin{pmatrix} 1 & b-1 & 1 \\ 2 & b-1 & 2 \\ 0 & 1 & b/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\textbf{10 puntos})$$

Las soluciones de este sistema dependen del determinante de la matriz del lado izquierdo. Sea B esta matriz, se tiene que $\det B = -b(b-1)/2$ (**10 puntos**). Si $b \neq 0, 1$, entonces $\mathrm{Ker}(A) = \{\bar{0}\}$, el polinomio nulo (**10 puntos**). Si $b = 0$, entonces el sistema queda como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De acá, $a_3 = -a_1, a_2 = 0$ y luego $\mathrm{Ker}(A) =< 1 - x^2 >$ (**10 puntos**). De la misma forma, si $b = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se llega a $\operatorname{Ker}(A) =< 1 + x/2 - x^2 >$ (**10 puntos**).

b) Si $b = 0$ o $b = 1$, $\dim \operatorname{Im}(A) = 2$, por el Teorema de la dimensión (**10 puntos**). Si no, $\dim \operatorname{Im}(A) = 3$ (**10 puntos**).

c) Mientras b no tome los valores 0 o 1, se tiene que A es un isomorfismo (**20 puntos**).

4. Discuta el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones, justificando cada una de sus respuestas:

a) Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ para $a(x), b(x)$ continuas en algún intervalo real I, entonces los ceros de $u(x)$ y $v(x)$ son distintos.

b) Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos soluciones linealmente dependientes de la ecuación $y''(x) + \cos x \cdot y'(x) + e^{3x}y(x) = 0$. Si $u(0) = 1$, $u'(0) = -2$, $v'(0) = 3$. Entonces $v(0)$ está unívocamente determinado.

c) ¿Existe una transformación lineal inyectiva $T : V \to \mathbb{R}^2$, donde $V = \{(x, y, z, t) : -x + y + z + 2t = 0\}$?

Solución.

a) Verdadero. Si no fuera así las soluciones tienen al menos un cero igual. El Wronskiano entonces vale cero, contradicción al hecho de que las soluciones son linealmente independientes (**35 puntos**).

b) Verdadero. Si las soluciones son linealmente dependientes entonces el Wronskiano es nulo. Se tiene una ecuación para la incógnita $v(0)$ que entrega $v(0) = -3/2$ (**35 puntos**).

c) No existe tal transformación, pues $\dim V = 3$ y la dimensión de su imagen a lo más es 2. Luego, $\operatorname{Ker} T \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ y la transformación no es inyectiva (**30 puntos**).

5. La ecuación

$$xu''(x) - u'(x) + r(x)u(x) = 0, \qquad x > 0,$$

tiene a $u_1(x) = p(x)$ y a $u_2(x) = xp(x)$ como soluciones, donde $p(1) = 1$.

a) Determine las funciones $r(x)$ y $p(x)$.

b) Con $r(x)$ y $p(x)$ determinados en (a) encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$xy''(x) - y'(x) + r(x)y(x) = x^{-1/2}p(x).$$

Solución.

a) Tenemos que $u_2'(x) = p(x) + xp'(x)$ y $u_2''(x) = xp''(x) + 2p'(x)$. Reemplazando **(15 puntos)**

$$\begin{aligned} x(xp'' + 2p') - (xp' + p) + rxp &= 0 \\ x(xp'' - p' + rp) + 2xp' - p &= 0 \\ 2xp' - p &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $p(x) = cx^{1/2}$. Puesto que $p(1) = 1$, se tiene que $p(x) = x^{1/2}$. Reemplazando nuevamente en la EDO se tiene que $r(x) = \frac{3}{4x}$.
(15 puntos)

b) Al reemplazar se obtiene

$$xy''(x) - y'(x) + \frac{3}{4x}y(x) = 1 \qquad \textbf{(10 puntos)}$$

La ecuación tiene la forma anterior salvo por el término no homogéneo. Resta entonces encontrar una solución particular. Por simple inspección $y(x) = -4x$. Y entonces la solución general es

$$y_G(x) = c_1x^{1/2} + c_2x^{3/2} - 4x. \qquad \textbf{(25 puntos)}$$