UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CUARTA TAREA MAT – 023
4 de mayo de 2009

1. Un objeto de masa m cae a tierra. En su caída encuentra una fuerza de resistencia del aire R que depende de la velocidad según la fórmula descubierta experimentalmente:

$$R(v) = -kv(1 + a|v|),$$

donde k y a son constantes positivas. Halle la velocidad terminal del objeto. *Sugerencia*: No es necesario resolver la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN. La ecuación diferencial para la velocidad del cuerpo es

$$\dot{v} = g - \frac{kv}{m}(1 + a|v|), \qquad (\textbf{25 puntos})$$

donde $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$. Si el cuerpo está cayendo y fijamos el sistema de referencia en la dirección del movimiento, entonces el problema se reduce a

$$\dot{v} = g - \frac{kv}{m}(1 + av). \qquad (\textbf{25 puntos})$$

Nos interesan las soluciones de equilibrio, así que debemos resolver

$$akv^2 + kv - mg = 0 \qquad (\textbf{10 puntos})$$

Esto conduce a

$$v = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4akmg}}{2ak}. \qquad (\textbf{15 puntos})$$

Nos interesan las soluciones positivas, así que la velocidad terminal del cuerpo debe ser

$$v = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4akmg}}{2ak}. \qquad (\textbf{25 puntos})$$

2. El *modelo de Smith* considera que la evolución de una población P es directamente proporcional al producto entre la población actual con la razón entre la diferencia de la *capacidad del medio* y la población actual, y una función lineal de la población, $l(P) = 1 + \beta P$. Considere la capacidad del medio y la pendiente de $l(P)$, β, como constantes positivas.

   a) Plantear la ecuación diferencial ordinaria que describe la evolución de la población en el tiempo.

Coordinación MAT–023/jcc. Fecha de entrega: 29 de abril de 2009.

b) Analizar el comportamiento cualitativo de las soluciones positivas.

c) ¿Qué ocurre para poblaciones iniciales mayores que la capacidad del medio? ¿Para poblaciones menores que la capacidad del medio?

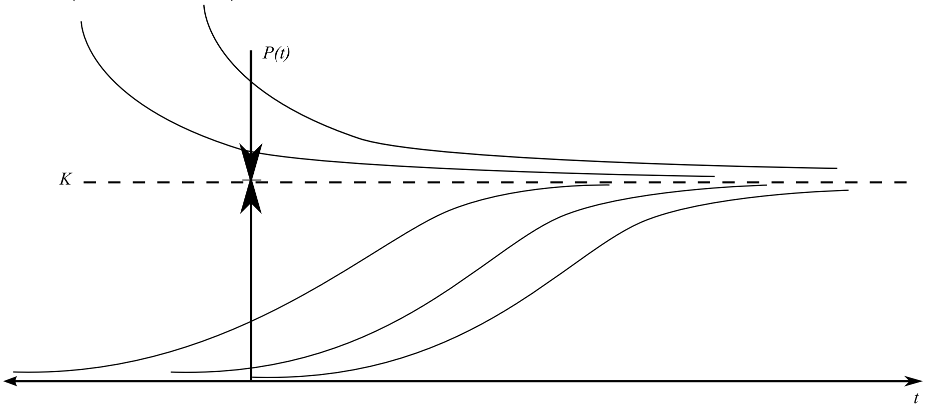
d) Esbozar las soluciones de la ecuación obtenida por usted en (*a*). Si inicialmente la población ocupa la mitad de la capacidad del medio ¿En cuánto tiempo la población ocupa las tres cuartas partes de la capacidad del medio?

Solución.

a) Sean $P(t)$ la población en el instante t; a la constante de proporcionalidad positiva y K la capacidad del medio. (**5 puntos**) Entonces: (**10 puntos**)

$$\dot{P}(t) = aP(t)\,\frac{K - P(t)}{l(P)} = aP(t)\,\frac{K - P(t)}{1 + \beta P(t)} \tag{1}$$

b) Puntos de equilibrio: $P = 0$ y $P = K$. Soluciones de equilibrio: $P(t) = 0$ y $P(t) = K$. (**10 puntos**) Para $P < 0$, el lado derecho de (1) carece de sentido (la población es mayor o igual que cero). Para $0 < P < K$ se tiene que el lado derecho de (1) es positivo y finalmente para $P > K$ el lado derecho de (1) es negativo (**10 puntos**). Con ello



(**15 puntos**)

c) No importa la población inicial, ya que $P = K$ es un atractor y luego la población siempre tiende hacia K cuando $t \to \infty$. (**15 puntos**)

d) La ecuación (1) es de variables separables y luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\beta P}{P(K-P)}\,dP &= C\,a\,t, \qquad P \neq K, C \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{K}\int \frac{dP}{P} + \left(\beta + \frac{1}{K}\right)\int \frac{dP}{K-P} &= C\,a\,t \\
\frac{P^{1/K}}{(K-P)^{\beta+1/K}} &= Ce^{a\,t}
\end{aligned}$$

que es una solución implícita. (**20 puntos**)

Si inicialmente $P_0 = 1/2K$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{2^{-1/K}K^{1/K}}{2^{-(\beta+1/K)}K^{1/K+\beta}} &= C, \quad \text{de donde} \\
2^{\beta}K^{-\beta} &= C. \quad (\textbf{5 puntos})
\end{aligned}$$

Luego, el tiempo en que $P = 3/4K$ es

$$\begin{aligned}
\frac{(3/4)^{1/K}K^{1/K}}{(1/4)^{\beta+1/K}K^{1/K+\beta}} &= 2^{\beta}K^{-\beta}e^{at} \\
3^{1/K}\,2^{2\beta}\,K^{-\beta} &= 2^{\beta}K^{-\beta}e^{at} \\
3^{1/K}2^{\beta} &= e^{at} \\
\therefore t &= \frac{1/K\ln 3 + \beta\ln 2}{a} \qquad (\textbf{10 puntos})
\end{aligned}$$

3. Considere el problema de valor inicial para $\alpha \geq 2$:

$$y' = \frac{y-\alpha}{\operatorname{sen} t - \alpha}\cos t, \quad y(0) = \sqrt{2}$$

¿Entre qué valores está la solución $y(t)$ del problema de valor inicial? ¡No intente resolver la ecuación diferencial!

Solución. Por inspección se tienen dos soluciones: $y_1(t) = \alpha$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} t$ (**40 puntos**). Puesto que $\alpha \geq 2$, las soluciones $y(t)$ tales que $y(0) = \sqrt{2}$ deben satisfacer la desigualdad $y_2(t) < y(t) < y_1(t)$ (**40 puntos**). Además, $y'(0) = \frac{\sqrt{2}-\alpha}{-\alpha} > 0$, y la solución tiende a $y_1(t)$ (**20 puntos**).

4. Considere las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

$$y' = b(y-a) \qquad\qquad y' = -py^3.$$

¿Para qué valores de $a, b, p \in \mathbb{R}$ estas ecuaciones tienen la misma línea de fase? (es decir, equivalentes cualitativamente)

Solución. Si $b = p = 0$, ambas ecuaciones tienen como solución a constantes (**10 puntos**). Si no, es claro que ambas ecuaciones deben poseer el mismo equilibrio, luego $a = 0$ (**10 puntos**). Hay dos casos posibles:

a) $b < 0, p > 0$. Único equilibrio es $y = 0$ y es un atractor (**40 puntos**).

b) $b > 0, p < 0$. Único equilibrio es $y = 0$ y es un repulsor (**40 puntos**).

5. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(x - y\cos(y/x))\,dx + x\cos(y/x)\,dy = 0$.

b) $-y\,dx + x(2xy+1)\,dy = 0$.

c) $(x+2y-1)\,dx + (2x+5)\,dy = 0$.

Solución

a) Cambio de variable $v = y/x$, $x \neq 0$ (**10 puntos**). Luego $dy = v\,dx + x\,dv$. Así se llega a la ecuación de variables separables:

$$\frac{dx}{x} + \cos v\,dv = 0. \qquad (\textbf{20 puntos})$$

Con soluciones $\ln x + \operatorname{sen} v = C$, $C \in \mathbb{R}$. Luego, las curvas solución son $\ln x + \operatorname{sen} y/x = C$ (**10 puntos**).

b) La ecuación no es exacta. Un factor integrante es $\mu = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ (**20 puntos**). Así, se llega a la ecuación

$$-\frac{y}{x^2}dx + \left(2y + \frac{1}{x}\right)dy = 0, \qquad (\textbf{10 puntos})$$

que evidentemente es exacta. Luego, las curvas solución son

$$y^2 + y/x + C, C \in \mathbb{R} \qquad (\textbf{10 puntos}).$$

c) La ecuación es exacta, las curvas solución se obtienen por integración directa y son

$$2xy + 5y + x^2/2 - x + C, C \in \mathbb{R} \qquad (\textbf{20 puntos})$$