Universidad Técnica Federico Santa María — Semestre II, 2010
Departamento de Matemática — E. Cerpa, A. Mercado

Análisis Funcional
Tarea #1

Entregar resueltos 6 ejercicios: los primeros tres y otros tres a escoger.

Ejercicio 1 . Sean E_1, E_2 dos espacios de Banach. Sea $b : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal separadamente continua (es decir, $b(x,\cdot)$ y $b(\cdot,y)$ son lineales y continuas para cada $x \in E_1$, $y \in E_2$ respectivamente). Demuestre que b es continua, y que existe $M > 0$ tal que

$$|b(x,y)| \leq C\|x\|_{E_1}\|y\|_{E_2} \quad \forall\, x \in E_1, y \in E_2.$$

Como veremos en los siguientes ejemplos, para demostrar el punto anterior son esenciales la linealidad y la completitud.

- Considere $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

  $$\varphi(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

  Muestre que φ es separadamente continua pero no continua (considere las rectas $y = mx$).

- Sea X el espacio $C([0,\pi])$ dotado de la norma $\|\cdot\|_1$. Sea $b : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $b(f,g) = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$. Verifique que b es bilineal separadamente continua pero no continua (considere la sucesión $f_n(t) = \sqrt{n}\sin(nt)1_{[0,\frac{\pi}{n}]}$).

Ejercicio 2 . Denotemos por c al espacio de las sucesiones reales convergentes, y c_0 al espacio de sucesiones reales que convergen a cero.

1. Muestre que c y c_0 son subespacios cerrados de ℓ^∞. (El espacio ℓ^∞ está formado por las sucesiones reales acotadas, dotado de la norma $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup\{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$).
2. Muestre que c' y c_0' pueden ser identificados con el espacio de sucesiones sumables definido por $\ell^1 = \left\{ \{x_n\} \subset \mathbb{R} \quad / \quad \|\{x_n\}\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty. \right\}$.

Ejercicio 3 . Sean E, F espacios de Banach, y $T_n : E \longrightarrow F$ operadores acotados que convergen puntualmente al operador $T : E \longrightarrow F$ (i.e. $T_n x \to Tx$ para todo $x \in E$).

1. Muestre que $T_n \to T$ uniformemente en cada subconjunto compacto de E.
2. Muestre que no necesariamente $T_n \to T$ en la norma de los operadores.
   Sugerencia: considere $T_n : c_0 \longrightarrow c_0$ definido por $T_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$.

Ejercicio 4 . Sea E un espacio de Banach. Sean $T, S : E \longrightarrow E$ operadores lineales cerrados tales que $dom(S) \subset dom(T)$. Decimos que T es acotado por S si existen $a, b \geq 0$ tales que $\|Tx\| \leq a\|Sx\| + b\|x\|$, $\forall x \in dom(S)$. Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(S - \lambda I_d)$ posee inversa en $\mathcal{L}(E, E)$. Demuestre que T es acotado por S.

Ejercicio 5 .

1. Sea X un espacio vectorial normado no trivial. Sea $y \in X - \{0\}$. Pruebe que existe $f \in X'$ tal que $f(y) = \|y\|$ y $\|f\| = 1$.

2. Sean X_1, X_2 dos espacios normados con $X_1 \neq \{0\}$. Demuestre que si $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ es completo, entonces X_2 es Banach.

Ejercicio 6 . Sea X un espacio vectorial normado. Sea $Y \subset X$ un subespacio vectorial propio cerrado. Considere $e \in X - Y$ y defina $\delta := \inf_{y \in Y} \|e - y\|$. Demuestre que existe $f \in X'$ tal que $\|f\| = 1$, $f(e) = \delta$ y $f(y) = 0$ $\forall y \in Y$.

Ejercicio 7 . Sea E un espacio de Banach y $\{x_n\}_n \subset E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Usando el Teorema de Hahn-Banach muestre que existe una sucesión de combinaciones lineales de elementos de $\{x_n\}_n$ que converge fuerte a x.

Ejercicio 8 . Sean E, F espacios de Banach, y $T : E \longrightarrow F$ un operador lineal que satisface

$$u \circ T \in E' \quad \text{para todo}\, u \in F'.$$

Muestre que T es acotado.

Ejercicio 9 . Sea H un espacio de Hilbert. El operador acotado $P : H \longrightarrow H$ es una proyección si $P^2 = P$. Demuestre que si P una proyección en H, entonces:

1. El operador $Q = I - P$ es una proyección, y satisface $PQ = QP = 0$.

2. $N(P) = R(Q)$.

3. $H = N(P) \bigoplus R(P)$.

Nota: $H = A \bigoplus B$ si A y B son subespacios cerrados de H tales que $A \cap B = \{0\}$ y $H = A + B$.

Ejercicio 10 . Sea E un espacio de Banach y $M \subset E$ un subespacio vectorial cerrado. Demuestre que la topología $\sigma(M, M')$ coincide con la traza de $\sigma(E, E')$ sobre M.

Ejercicio 11 . Considere el espacio de Banach $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. Suponga que $f_n \rightharpoonup f$ en este espacio. Muestre que f_n converge puntualmente a f.

Ejercicio 12 . Sea $\{f_n\} \subset l^2(\mathbb{N}) = l^2(\mathbb{N})'$ una sucesión definida por $f_n(a_1, a_2, \ldots) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Muestre que f_n no converge fuertemente, y que converge en la topología débil$-*$ al cero.

Ejercicio 13 . Una sucesión en $\{f_n\} \subset C([-1,1])$ (espacio dotado de la norma uniforme) define una sucesión en $C([-1,1])'$ por $f_n(g) = \int_{-1}^{1} g(t) f_n(t) dt$ para todo $g \in C([-1,1])$. Suponga que f_n converge débil$-*$ al elemento δ definido por $\delta(g) = g(0)$. Muestre que $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(t) dt = 1$ y que existe $C > 0$ tal que $\int_{-1}^{1} |f_n(t)| dt \leq C$ para todo n.