UTFSM
Departamento de Matemática.

Prof.: Alberto Mercado Saucedo.
Ayud.: Piero Visconti.

MAT-227 ANÁLISIS III.
TAREA 1. SEMESTRE 2017-1
ENTREGAR RESUELTA EL LUNES 17 DE ABRIL.

Problema 1. Sea X un espacio vectorial topológico. Sea $H \subset X$ un hiperplano (es decir, $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ para algún funcional lineal f, y algún $\alpha \in \mathbb{R}$).

(1) Suponga que $V \subset X$ es un subespacio vectorial afín (es decir, $V = V_0 + x_0$, con V_0 subespacio vectorial, y $x_0 \in X$) que contiene a H. Demuestre que, o bien $V = H$ o bien $V = X$.

(2) Deduzca que o bien H es cerrado o bien es denso en X. Determinar qué propiedad se concluye sobre el funcional f.
Observación: la propiedad descrita en (1) es puramente algebraica.

Problema 2. Sean X un espacio de Banach y $B \subset X^*$ no vacío. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) El conjunto B es acotado.

(2) Para cada $x \in X$, el conjunto $J_x(B) := \{f(x) : f \in B\} \subset \mathbb{R}$ es acotado.

Problema 3. Para $1 \leq p < \infty$ dado, definimos

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \|x\|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

(1) Demuestre que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

Sugerencia: Podrá usar la desigualdad de Young: $ab \leq a^p/p + b^q/q$ para $a, b \geq 0$, con $p, q \geq 1$ exponentes conjugados, para probar la desigualdad de Holder (discreta):

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q \qquad x \in \ell^p, y \in \ell^q.$$

Para la desigualdad triangular ($p > 1$) escriba $|x_n + y_n|^p = |x_n + y_n||x_n + y_n|^{p-1}$, pruebe que $\{|x_n + y_n|^{p-1}\} \in \ell^q$ y utilice la desigualdad de Holder.
Para la completitud deberá usar que $\mathbb{R}$ es completo.

(2) Si p, q son exponentes conjugados ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), pruebe que $(\ell^p)^*$ se identifica con ℓ^q.

Sugerencia: Si denotamos $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^p$, la sucesión formada por un 1 en lugar k-ésimo, considere, para cada $f \in (\ell^p)^*$, la transformación dada por

$$\Lambda(f) = \{f(e_k)\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Pruebe que $\Lambda : (\ell^p)^* \longrightarrow \ell^q$ es un isomorfismo isométrico.

Problema 4. Sea M un subespacio cerrado de ℓ^p y de ℓ^q. Pruebe que las normas inducidas en M por ambos espacios son equivalentes.

Problema 5. El objetivo de este problema es demostrar el **Teorema de Krein-Milman**. Para esto, algunas **definiciones**: Sean X un evn, $K \subset X$ un compacto convexo. Decimos que $S \subset K$ es un **conjunto extremo** de K si siempre que un elemento de S se escribe como combinación convexa de dos puntos de K, entonces los dos puntos están en S. Decimos que $e \in K$ es **punto extremo** de K si $S = \{e\}$ es un conjunto extremo.
Si $E \subset X$, denotamos por $\mathrm{conv}(E)$ a la intersección de todos los convexos que contienen a E. Este conjunto es llamado la *cerradura convexa* (o *convex hull*) de E.
Teorema de Krein-Milman. Sea X un evn, $K \subset X$ un compacto convexo y denotemos por E al conjunto de *puntos extremos* de K. Entonces se tiene $K = \overline{conv(E)}$. Es decir, K es la cerradura del menor convexo que contiene a sus puntos extremos.

Para probarlo, proceda como sigue: Sea $\mathcal{P}$ la colección de conjuntos extremos cerrados de K. Para cada $A \subset X$, $f \in X^*$, denotamos $A_f := \{x \in A : f(x) = \max_{z \in A} f(z)\}$ ($A_f = \emptyset$ si el máximo no se alcanzara).

(1) Pruebe que dados $f \in X^*$ y $S \in \mathcal{P}$, entonces $S_f \in \mathcal{P}$.
(2) Sea $S \in \mathcal{P}$, y considere la colección $\mathcal{P}_1$ de conjuntos extremos contenidos en S. Entonces existe una subcolección totalmente ordenada y maximal $\Omega \subset \mathcal{P}_1$ (justifique por qué). Tomar $M = \bigcap_{T \in \Omega} T$. Pruebe que M contiene un solo punto. Deduzca que todo $S \in \mathcal{P}$ contiene algún punto extremo de K.
(3) Sea $H = \mathrm{conv}(E)$. Pruebe que $\overline{H} \subset K$, y que $S \cap H \neq \emptyset$ para todo $S \in \mathcal{P}$.
(4) Suponga que existe $x_0 \in K \setminus \overline{H}$; pruebe que entonces existe $f \in X^*$ tal que $K_f \cap \overline{H} = \emptyset$. Concluya la demostración del Teorema de Krein-Milman.

Problema 6. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X por $\|x\|_1 := \|x\| + \|T(x)\|$ para todo $x \in X$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) T es continua.
(2) Las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes.
(3) La norma $\|\cdot\|_1$ es completa en X.