UTFSM
Departamento de Matemática.

Prof.: Alberto Mercado Saucedo.
Ayud.: Piero Visconti.

MAT-227 ANÁLISIS III.
TAREA 2. SEMESTRE 2017-1
ENTREGAR RESUELTA EL MIÉRCOLES 24 DE MAYO

Problema 1. Sea $X = c_0 := \left\{ x = \{x_n\} \in \ell^\infty \ : \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$. Denotemos por $\{e_n\}$ la sucesión definida por $e_n = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots)$. (Es decir $e_n^k = \delta_{kn}$, base estándar ya sea de X, X^* o X^{**}).

(1) Demuestre que $\{e_n\}$ converge débilmente en X a cero, y no converge fuertemente.
(2) Demuestre que $\{e_n\}$ converge débil-$*$ en X^*, y no converge débil ni fuertemente.
(3) Sea $s_n := \sum_{k=n}^{\infty} e_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{s_n\}$ converge débil-$*$ en X^{**}, y no converge débil ni fuertemente.

Problema 2. Sea X un espacio de Banach.

(1) Sea $x \in X$. Para cada $f \in X^*$ considere
$$U_f(x) := \{g \in X^* \ : \ |g(x) - f(x)| < 1\}.$$
Pruebe que $U_f(x)$ es débil$-*$ abierto en X^*.
(2) Pruebe que si $C \subset X^*$ es débil$-*$ compacto, entonces, para cada $x \in X$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in C$ tales que $C \subset \bigcup_{j=1}^n U_{f_j}(x)$.
(3) Sea $C \subset X^*$ débil$-*$ cerrado. Demuestre que $C \subset X^*$ es débil$-*$ compacto sí y sólo sí C es fuertemente acotado (i.e. acotado en la norma de X^*).
Sugerencia: Usar (2) y los teoremas de Banach-Steinhaus y Banach-Alaouglu.

Problema 3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach tal que $B = \{x \in X \ : \ \|x\| \leq 1\}$ no tiene puntos extremos. Muestre que X no es el dual de ningún espacio de Banach (es decir, no existe ningún isomorfismo isométrico a algun espacio Z^*, con Z Banach).
Deduzca que c_0 no es dual de ningún espacio de Banach.

Sugerencia: Usar los Teoremas de Banach-Alaoglu y de Krein-Milman.

Problema 4. Sea X un espacio de Banach. Probar que si $C \subset X$ es cerrado convexo, entonces C es la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen.

Problema 5. Pruebe que un espacio de Banach X es reflexivo sí y solo sí X^* es reflexivo.

Problema 6. Sea X un espacio de Banach reflexivo, y sea $M \subset X$ un subespacio vectorial cerrado. Pruebe que M es reflexivo.
Sugerencia: Pruebe que la topología débil de M como evn coincide con la topología heredada de la topología débil de X.

Problema 7. Pruebe que un espacio de Banach X es reflexivo y separable sí y solo sí X^* es reflexivo y separable.

Problema 8. Sea X un espacio de Banach. Demostrar:

(1) Si X es separable entonces B_{X^*} es metrizable en $\sigma(X^*, X)$.
(2) Si X^* es separable entonces B_X es metrizable en $\sigma(X, X^*)$.

Problema 9. Demostrar el **Teorema de Banach-Alaoglu secuencial** para espacios separables:
Si X es un espacio vectorial normado **separable**, entonces la bola unitaria cerrada B_{X^*} de X^* es secuencialmente compacta en la topología débil-*.

Observación: Se dice que un conjunto es secuencialmente compacto si toda sucesión acotada tiene alguna subsucesión convergente.
Sugerencia: Si $D \subset X$ es un denso numerable, usar el Teorema de Tychonoff secuencial (el cual es válido para productos **a lo más numerables**) en $\mathbb{R}^D$.