UTFSM. MAT-227 Análisis III. Semestre 2017-1. Tarea 3
Prof. Alberto Mercado. Ayud. Piero Visconti.
Entregar resuelta el **miércoles 5 de julio.**

20 de junio de 2017

Trabajaremos con espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, a menos que se haga explícitamente otra indicación.

1. Probar que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio con producto interior si y solo si se satisface la ley del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todo $x, y \in X$.

2. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto no vacío, $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$. Demuestre que $L^p(\Omega)$ no es un espacio de Hilbert.

3. Sea B_H la bola unitaria cerrada del espacio de Hilbert H. Determine de manera explícita el operador proyección en B_H. (Pruebe que la proyección radial funciona).

4. Sea H un espacio de Hilbert. Pruebe que el conjunto de puntos extremos de B_H es $S := \{x \in H \,:\, \|x\| = 1\}$. Deduzca el Teorema de Krein-Milman para espacios de Hilbert. Pruebe que toda $U \in \mathcal{L}(H)$ isometría es un punto extremo de $B_{\mathcal{L}(H)}$.

5. Sea $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada, y definimos $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ por

$$T\{x_n\} = \{\lambda_n x_n\}.$$

Demuestre que T es compacto si y solo si $\lambda_n \to 0$.

6. Sean H, H_1, H_2 espacios de Hilbert. Demuestre:

   a) El operador $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ es compacto si y solo si T^* es compacto.

   b) Si H es separable entonces para todo $T \in \mathcal{L}(H)$ existe $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(H)$ de rango finito tales que $T_n x \to Tx$ para cada $x \in H$.

c) El operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es compacto si y solo si para toda sucesion $\{x_n\} \subset H$ tal que $x_n \rightharpoonup 0$ (converge debilmente) se tiene $Tx_n \to 0$ (fuertemente).

7. Denotemos $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Sea $K : I^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Si $f \in C(I)$ entonces definimos

$$T_K f(t) = \int_a^b K(t, s) f(s) ds \tag{1}$$

para cada $t \in I$. El operador T_K es llamado operador integral de núcleo K.

   a) Demuestre que si K es continua entonces $T_K \in \mathcal{L}(C(I))$ es compacto.

   b) Demuestre que si K es continua entonces $T_K \in \mathcal{L}(L^2(I))$ es compacto.

   c) Demuestre que si $K \in L^2(I^2)$ entonces $T_K \in \mathcal{L}(L^2(I))$ es compacto.

8. Denotamos $x \in H := \ell^2$ por $x = \{x_n\} = (x_1, x_2, \ldots)$. Definimos los operadores

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots),$$

$$S_l x = (x_2, x_3, \ldots),$$

(operadores *shift a la derecha* y *shift a la izquierda*, respectivamente).

   a) Determine las normas de cada uno de estos dos operadores. Determine si son compactos.

   b) Identifique el adjunto de cada operador.

   c) Encuentre el espectro, el conjunto de valores propios, y los correspondientes espacios propios, para cada operador S_r y S_l

9. Decimos que $P \in \mathcal{L}(H)$ es un operador **proyección** si $P^2 = P$. Sea P un operador proyección; demuestre que P es una proyección ortogonal sí y sólo sí P es autoadjunto.

10. (Operadores de Hilbert -Schmidt). Sea H un espacio de Hilbert.

   a) Sean $T \in K(H)$ (operador compacto), y $\{g_n\}$ una sucesión ortonormal. Probar que $\lim_{n\to\infty} Tg_n = 0$.
   Sugerencia: pruebe que $\{g_n\}$ es débilmente convergente.

   b) Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de H. Probar que si $\sum \|Te_n\|^2 < \infty$ entonces T es un operador compacto. Decimos que T es un operador de **Hilbert - Schmidt**. Para esto:

      1) Demuestre que el operador T_N definido por $T_N x = \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) Te_n$ es compacto.

      2) Pruebe que $T = \lim_{N\to\infty} T_N$ en $\mathcal{L}(H)$.

      3) Concluya.

c) Sea T un operador de **Hilbert - Schmidt**. Demuestre que la suma del inciso anterior no depende de la base ortonormal de H.
Sugerencia: Si $\{f_m\}$ es otra base ortonormal, escribir $u_{n,m} := |(Te_n, e_m)|^2$. Usar que, gracias al Teorema de Fubini-Tonelli, se tiene $\sum_n \sum_m u_{n,m} = \sum_m \sum_n u_{n,m}$ (por qué?). Concluir usando las propiedades de T^* y la identidad de Parseval.

11. Si H es un espacio de Hilbert, decimos que un operador $A \in \mathcal{L}(H)$ es **positivo** si $(Ax, x)_H \geq 0$ para todo $x \in H$. Pruebe que si H es un espacio sobre $\mathbb{C}$, entonces:

    a) Todo operador positivo es autoadjunto.

    b) La relación definida por $T \leq S$ si $S - T$ es positivo es una relación de orden.

    Proporcione un contra-ejemplo a cada uno de los resultados anteriores si H es real.

12. Sea $T \in K(H)$ un operador compacto, autoadjunto y positivo. Demuestre que existe un operador $S \in K(H)$ tal que $S^2 = T$ (que denotaremos por $S = \sqrt{T} = T^{1/2}$). Pruebe que S es el único operador acotado positivo con tal propiedad.
Sugerencia: Use el Teorema de descomposición espectral para T, y defina S de manera conveniente.

13. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $T \in \mathcal{L}(H)$ compacto autoadjunto. Para cada $\lambda \in vp(T)\setminus\{0\}$, denotamos por P_λ al operador proyección ortogonal sobre $E_\lambda := N(\lambda I - T)$.
Sea $x \in H$. Probar que la ecuación
$$Ty = x \tag{2}$$
tiene solución si y solo si:

    a) $x \in (N(T))^\perp$, y

    b) $\displaystyle\sum_{\lambda \in vp(T)\setminus\{0\}} \frac{\|P_\lambda x\|^2}{\lambda^2} < +\infty.$

    Y en tal caso, se tiene que las soluciones están dadas por
$$y = z + \sum_{\lambda \in vp(T)\setminus\{0\}} \frac{P_\lambda x}{\lambda},$$
con $z \in N(T)$.