Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2017

Profesores: E. Cerpa (CS), A. Mercado (CC)
Ayudantes: G. Arias (CS), R. Arancibia (CC)

# Certamen 1, MAT-125
# Introducción a la Matemática Avanzada

***Problema 1*** (25 puntos)

(a) En clases vimos que todo conjunto $A \subset \mathbb{N}$ no vacío tiene un primer elemento. Es decir, existe $\hat{a} \in A$ tal que $\hat{a} \leq a$, $\forall a \in A$. Use esto para demostrar el Principio de Inducción Fuerte:
Sea $P(n)$ una proposición formulada para cada elemento $n \in \mathbb{N}$. Si

   (i) $P(1)$ es verdadera, y

   (ii) $\Big(P(k) \text{ es verdadera } \forall k \in \{1, 2, \cdots n\}\Big) \implies \Big(P(n+1) \text{ es verdadera}\Big)$,

   entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pruebe que todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, posee algun factor primo.

***Problema 2*** (25 puntos) Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos tales que $\forall a \in X$, $\forall b \in Y$, se tiene que $a \leq b$. Pruebe que

(a) $\sup X$ e $\inf Y$ existen, y que además $\sup X \leq \inf Y$.

(b) $\sup X = \inf Y \iff \forall\, c > 0$, $\exists\, a \in X$, $\exists\, b \in Y$, tales que $(b - a) < c$.

***Problema 3*** (25 puntos)

(a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente. Pruebe que si esta posee alguna subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(b) Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = \infty$. (Sugerencia: Considere $\ln(2^n)$).

(c) Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.
(Sugerencia: Considere $\ln(\sqrt{n})$. Recuerde que $\ln(x) < x$, $\forall x > 0$).

***Problema 4*** (25 puntos) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Muestre que exactamente una de las siguientes afirmaciones es cierta:

P1: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

P2: $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, tales que $\forall\, n \geq N$, $x_n > \varepsilon$.

P3: $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, tales que $\forall\, n \geq N$, $x_n < -\varepsilon$.