Certamen 1

Introducción a la Matemática Avanzada

MAT-125

1. (20pts)

   a) Sean A y B son dos conjuntos acotados de $\mathbb{R}$, y sea $A+B=\{x+y\,:\,x\in A\wedge y\in B\}$. Pruebe que

      i) $A+B$ es un conjunto acotado

      ii) $\sup A+\sup B=\sup(A+B)$.

   b) Sean $f,g:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones acotadas. Pruebe que

      i) $(f+g):A\to\mathbb{R}$ es una función acotada

      ii) $(f+g)(A)\subset f(A)+g(A)$

      iii) $\sup_{a\in A}\{(f+g)(a)\}\leq\sup_{a\in A}\{f(a)\}+\sup_{a\in A}\{g(a)\}$.

2. (40pts) Sea X el conjunto de todas las sucesiones reales $x\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ también denotadas $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) Pruebe que X es no numerable.

   b) Sea $\sim$ la relación en $X\times X$ definida por

   $$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{n\geq 1}|x_n-y_n|<\infty. \tag{1}$$

      1) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

      2) Demuestre que $[c_0]_\sim\in X/\sim$ es el conjunto de las sucesiones cuyas series son absolutamente convergentes, donde $c_0\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ es la sucesión constante $c_0(n)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

   c) Sea $a\in\mathbb{R}$ un número real mayor que 1 y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in X$. Pruebe que si se verifica que

   $$(\exists n_0\in\mathbb{R})\text{ tal que }(\forall n\in\mathbb{N})\left(n\geq n_0\Rightarrow\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\leq 1-\frac{a}{n}\right), \tag{2}$$

   entonces la serie

   $$\sum_{n=1}^{\infty}x_n\quad\text{es absolutamente convergente.}$$

   Sugerencia: Si lo estima conveniente puede seguir los siguientes pasos, justificando apropiadamente cada una de sus afirmaciones:

      1) Primero pruebe que

      $$(\forall k\in\mathbb{N})\,(k\geq n_0\Rightarrow(k-1)|x_k|-k|x_{k+1}|\geq(a-1)|x_k|)\,. \tag{3}$$

      2) En la desigualdad previa, aplique sumatoria desde $k=n_0$ hasta $k=n$ y obtenga una nueva desigualdad que le permita concluir que la sucesión de sumas parciales de los términos $|x_k|$ es acotada.

      3) Concluya el resultado.

3. (40pts) Un conjunto $C \neq \varnothing$ se dice *convexo* si

$$(\forall x, y \in C)(\forall \lambda \in [0,1]) \quad (1-\lambda)x + \lambda y \in C. \tag{4}$$

Por otra parte una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice convexa si

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall \lambda \in [0,1]) \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{5}$$

a) Demuestre que $[0,1]$ es convexo y que $[0,1] \cup \{2\}$ no es convexo.

b) Sea $(A_\mu)_{\mu \in U}$ una familia de conjuntos convexos en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\cap_{\mu \in U} A_\mu$ es convexo.

c) Demuestre que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa sí y sólo sí el conjunto

$$E(f) = \{(x, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, f(x) \leq \mu\}$$

es convexo.[1]

d) Sea $(f_\mu)_{\mu \in U}$ una familia de funciones convexas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sea $f = \sup_{\mu \in U} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia $f(x) = \sup_{\mu \in U} f_\mu(x)$.

i) Demuestre que $E(f) = \cap_{\mu \in U} E(f_\mu)$.

ii) Concluya que f es convexa.

[1]Indicación: $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es convexo si, para todo (x, u) y (y, v) en A y $\lambda \in [0,1]$,

$$(1-\lambda)(x, u) + \lambda(y, v) = ((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)u + \lambda v) \in A.$$