Certamen 2

Introducción a la Matemática Avanzada

MAT-125

Semestre 2016-02

Profs. Salomón Alarcón y Luis Briceño

1. (30pts) Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua.

   a) (8pts) Demuestre que f tiene **al menos** un punto fijo en $[0,1]$; es decir, pruebe que

   $$(\exists x^* \in [0,1]) \text{ tal que } f(x^*) = x^*.$$

   Sugerencia: *Estudie la función $h(x) = f(x) - x$ en $[0,1]$.*

   Para *b*) y *c*), sea $x_0 \in [0,1]$ fijo y considere la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida por

   $$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad x_{k+1} = f(x_k). \tag{1}$$

   b) (12pts) Asuma que la función f es creciente en $[0,1]$. Demuestre que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un punto fijo; es decir, pruebe que

   $$(\exists x^* \in [0,1]) \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} x_k = x^* \text{ y } f(x^*) = x^*$$

   Sugerencia: *Estudie los casos $f(x_0) \le x_0$ y $f(x_0) > x_0$, y concluya en cada caso que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona.*

   c) (10pts) Asuma que la función f es derivable en $]0,1[$. Pruebe que

   $$(\forall k \in \mathbb{N},\, k > 1)(\exists c_k \in]0,1[) \text{ tal que } f'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = x_{k+1} - x_k \tag{2}$$

   y que la sucesión $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N},k>1}$ posee al menos un punto de acumulación. Si además f es estrictamente creciente y $f(x_0) \neq x_0$, demuestre que $\lim_{k\to\infty} c_k = x^*$ donde x^* es un punto fijo de f.

   Sugerencia: *Para cada $k > 1$, estudie separadamente los casos $f(x_k) \neq x_k$ y $f(x_k) = x_k$.*

2. (20 pts) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Demuestre que $A = (A \cap A'_+) \cup (A \cap A'_-) \cup ais(A)$, donde $A'_+ = \{x \in \mathbb{R} : (\forall r > 0)\ ]x, x+r[\cap A \neq \varnothing\}$ y $A'_- = \{x \in \mathbb{R} : (\forall r > 0)\ ]x-r, x[\cap A \neq \varnothing\}$ son los conjuntos de puntos de acumulación por la derecha y por la izquierda de A, respectivamente, y $ais(A)$ es el conjunto de puntos aislados[1] de A.

3. (30 pts) Sean $a \in \mathbb{R}$ y $c > 0$ dos números reales y sea $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

   $$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(|x|^{-c}), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

   Demuestre

   a) (10 pts) f es continua sí y sólo sí $a > 0$.

   b) (10 pts) $f'(0)$ existe sí y sólo sí $a > 1$.

   c) (10 pts) f' es acotada sí y sólo sí $a \geq 1 + c$.

[1] Recuerde que $ais(A) = A \cap (A')^c$.

4. (20pts) Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función derivable en $(1, +\infty)$ tal que

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0. \tag{4}$$

Pruebe que para cada sucesión estrictamente creciente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $[1, \infty)$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty, \tag{5}$$

se verifica que

a) (10pts) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq n_0 \Rightarrow \left| \dfrac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}} \right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \right)$

b) (5pts) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq n_0 \Rightarrow \frac{f(x_{n_0})}{x_n} - \left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right) \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{f(x_n)}{x_n} \leq \frac{f(x_{n_0})}{x_n} + \left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right) \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

c) (5pts) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0.$