Certamen 3

Introducción a la Matemática Avanzada

MAT-125

Semestre 2016-02

Profs. Salomón Alarcón y Luis Briceño

1. Sea $f \in \mathcal{R}([1,b], id)$, para todo $b > 1$. Se define

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

si el límite existe. En ese caso decimos que $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.

   a) Suponga que, para todo $b > 1$, $f \in \mathcal{R}([1,b], id)$, $f \geq 0$ y que f es decreciente en $[1, +\infty[$. Demuestre que[1]

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 1} f(n) < +\infty. \tag{2}$$

   Sugerencia:

   1) Para demostrar $\Rightarrow$, para cada $b > 1$, calcule la suma inferior de f para la partición $\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, [b]\}$, demuestre $\sum_{n=2}^{[b]} f(n) \leq \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y concluya[2].

   2) Para demostrar $\Leftarrow$, calcule la suma superior de f para la partición $\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, [b]+1\}$, demuestre $\sum_{n=1}^{[b]} f(n) \geq \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y concluya.

   b) Demuestre que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge sí y sólo sí $p > 1$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función en $\mathcal{R}([a,b], id)$ y considere la función $F_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$(\forall y \in [a,b]) \quad F_n(y) = \int_a^y f_n(x)dx. \tag{3}$$

   a) Demuestre que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada entonces $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente equicontinua. Concluya que existe una subsucesión $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a una función $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

   Sugerencia: *Demuestre que las funciones $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son todas Lipschitz continuas con la misma constante.*

   b) Demuestre que F es uniformemente continua.

3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y considere la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   a) Pruebe que si $\alpha > \frac{1}{2}$, entonces la serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

   b) Pruebe que si $\alpha > 0$, entonces la serie converge uniformemente en

$$\mathbb{R}\setminus\,]-1,1[= \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}.$$

[1] Este resultado se conoce como criterio integral para convergencia de series.

[2] $[b] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq b\}$ es la parte entera de b.

c) Pruebe que si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, entonces la serie no converge uniformemente en $[-1,1]$.

Sugerencia: *Si lo estima conveniente para c), puede proceder de la siguiente forma:*

1) Para todo $k \geq 1$, *compare*

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \textit{con} \qquad \int_1^k \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

y demuestre que

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) > \frac{1}{2\sqrt{k}} \int_1^k \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

2) Para $\alpha \leq 1/2$, *demuestre, usando la parte anterior, que* f *no es continua en* 0 *y concluya.*

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ y sea $I = [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define la función

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f_n(x) := \dfrac{n}{2} \displaystyle\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(s)\,\mathrm{d}s. \end{array}$$

a) Pruebe que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está bien definida y que es uniformemente acotada en I.

b) Sea F una antiderivada de f, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y asuma que para cada $n \geq n_0$, se verifica

$$(\forall x, y \in [a-1, b+1]) \left(|z - x| \leq \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad |F(z) - F(x)| \leq \frac{2}{n^\rho} \right), \tag{4}$$

para algún $\rho > 1$. Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en I. ¿A qué función converge la sucesión? Justifique apropiadamente.