Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Certamen 1 MAT125

2^{do} Semestre 2015

Prof. Luis Briceño Arias

Considere la relación $\approx\subseteq[(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})]$ definida por

$$(\forall n,m,k,j\in\mathbb{N})\quad (n,m)\approx(k,j)\quad\Leftrightarrow\quad n+j=m+k. \tag{1}$$

(10p) *a)* Demuestre que $\approx$ es una relación de equivalencia.

Considere el conjunto $\mathbb{Z}:=(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\approx$.

(5p) *b)* Pruebe que $\mathbb{Z}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$.

(5p) *c)* Demuestre que para todo $[(n,m)]\in\mathbb{Z}$ se cumple

$$[(n,m)]=\begin{cases}[(n-m,0)], & \text{si } n\geq m;\\ [(0,m-n)], & \text{si } n<m.\end{cases} \tag{2}$$

[*Hint: Se recuerda que, para todo $m,n\in\mathbb{N}$ tales que $m\geq n$ existe un único $k\in\mathbb{N}$ tal que $m=n+k$. Ese único $k\in\mathbb{N}$ se denota $m-n$.*]

(10p) *d)* Considere los conjuntos $\mathbb{Z}_+=\big\{[(n,0)]\in\mathbb{Z}\ \mid\ n\in\mathbb{N}\big\}$ y $\mathbb{Z}_-=\big\{[(0,n)]\in\mathbb{Z}\ \mid\ n\in\mathbb{N}\big\}$. Demuestre que $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_+\cup\mathbb{Z}_-$ y que $\mathbb{Z}_+\cap\mathbb{Z}_-=\{[(0,0)]\}$. [*Hint: Puede usar que, para todo $m,n\in\mathbb{N}$, $m+n=0$ si y sólo si $m=n=0$.*]

Considere la relaciones $\prec\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y $\preceq\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definidas, para todo $n,m,k,j\in\mathbb{N}$, por

$$[(n,m)]\prec[(k,j)]\quad\Leftrightarrow\quad n+j<m+k \tag{3}$$

$$[(n,m)]\preceq[(k,j)]\quad\Leftrightarrow\quad\Big([(n,m)]\prec[(k,j)]\quad\vee\quad[(n,m)]=[(k,j)]\Big). \tag{4}$$

(15p) *e)* Demuestre que $\prec$ está bien definida y que es una relación de orden total estricto en $\mathbb{Z}$. [*Hint: Puede ocupar (sin demostrar) que, para todo $n,m,k\in\mathbb{N}$, $n<m\ \Leftrightarrow\ n+k<m+k$. Si lo demuestra, gana bonus de 5p.*]

(5p) *f)* Demuestre

$$(\forall n,m,k,j\in\mathbb{N})\quad\big\{[(n,m)]\preceq[(k,j)]\quad\Leftrightarrow\quad n+j\leq m+k\big\}. \tag{5}$$

Para todo $[(n,m)]\in\mathbb{Z}$, definimos $-[(n,m)]:=[(m,n)]$ y las operaciones $\oplus\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $\ominus\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $\odot\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ dadas por (asuma que están bien definidas)

$$[(n,m)]\oplus[(k,j)]:=[(n+k,m+j)] \tag{6}$$

$$[(n,m)]\ominus[(k,j)]:=[(n,m)]\oplus(-[(k,j)]) \tag{7}$$

$$[(n,m)]\odot[(k,j)]:=[(n\cdot k+m\cdot j,n\cdot j+m\cdot k)]. \tag{8}$$

Demuestre, para todo $n,m,k,j\in\mathbb{N}$,

(4p) *g)* $[(n,m)]\ominus[(n,m)]=[(0,0)]$.

(4p) *h)* $(-[(n,m)])\odot[(k,j)]=-([(n,m)]\odot[(k,j)])=[(n,m)]\odot(-[(k,j)])$.

(7p) *i)* $[(n,m)]\odot[(k,j)]=[(1,0)]\ \Leftrightarrow\ \Big([(n,m)]=[(k,j)]=[(1,0)]\ \vee\ [(n,m)]=[(k,j)]=-[(1,0)]\Big)$.
[*Hint: Puede asumir que, para todo $n,m\in\mathbb{N}$, $m\cdot n=1$ si y sólo si $m=n=1$.*]

Sea $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ definida por $f(n)=[(n,0)]$. Demostrar, para todo $n,m\in\mathbb{N}$,

(5p) *j)* $n<m\ \Leftrightarrow\ f(n)\prec f(m)$.

(10p) *k)* Demuestre que f es un homomorfismo inyectivo de $(\mathbb{N},+,\cdot)$ en $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$.

(5p) *ℓ)* Demuestre que $\mathbb{Z}$ es numerable.

(15p) *m)* Demuestre que todo subconjunto no vacío $A\subseteq\mathbb{Z}$ acotado superiormente tiene máximo. [*Hint: Puede serle de utilidad considerar los conjuntos $I_-=\big\{n\in\mathbb{N}\ \mid\ [(0,n)]\in A\big\}$ y $I_+=\big\{n\in\mathbb{N}\ \mid\ [(n,0)]\in A\big\}$.*]