UTFSM
Departamento de Matemática.

Prof.: Alberto Mercado Saucedo.
Ayud.: Fernando Roldán.

MAT-125 INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA AVANZADA.
CERTAMEN 1.
VIERNES 20 DE NOVIEMBRE

Problema 1. (40 pts.) Sea X un conjunto no vacío, y $f : X \longrightarrow X$ una función inyectiva. Considere la siguiente proposición:

$$x \in X \setminus f(X) \Longrightarrow o(x) := \{f^n(x) \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset X \text{ es infinito.} \tag{1}$$

a) Demuestre la Proposición 1 (notación: $f^n = f \circ f^{n-1}$, de manera que $o(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$).
b) Exhiba un ejemplo explícito que ilustre la Proposición 1.
c) Demuestre que el recíproco de la Proposición 1 no es cierto.
d) Si f no es inyectiva, ¿la Proposición 1 es cierta?. Demuéstrelo.

Problema 2. (40 pts.) Se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_*$ la relación de equivalencia dada por

$$(m, n) \sim (p, q) \text{ si } mq = pn, \quad \text{para todo par } (m, n), (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_*. \tag{2}$$

Denotaremos (m, n) por $\frac{m}{n}$.

a) Demuestre que la relación es de equivalencia.

Se define el conjunto de los números racionales como el conjunto de clases de equivalencia

$$\mathbb{Q} := \left\{ \left[\frac{m}{n}\right] \,:\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_* \right\}.$$

Definimos la suma y la multiplicación en $\mathbb{Q}$ por

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{p}{q}\right] = \left[\frac{mq + pn}{nq}\right], \qquad \left[\frac{m}{n}\right] \cdot \left[\frac{p}{q}\right] = \left[\frac{mp}{nq}\right]. \tag{3}$$

b) Demuestre que las operaciones dadas en (3) están bien definidas.
c) Demuestre que todo elemento de $\mathbb{Q}$ posee inverso aditivo, y que todo elemento de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ posee unverso multiplicativo.
d) Demuestre que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Problema 3. (20 pts.) Principio de inducción transfinita.
Sea I un conjunto **bien ordenado** (esto es, todo subconjunto $A \subset I$ posee un elemento $\mu \in A$ tal que $\mu \leq \lambda$ para todo $\lambda \in A$). Pruebe que I es **totalmente ordenado**.
Ahora, sea $P(\lambda)$ una proposición formulada para cada elemento $\lambda \in I$. Suponga que

i) $P(\lambda)$ es cierta para el menor elemento de I.
ii) Si $P(\lambda)$ es cierta para todo $\lambda \leq \lambda^*$ entonces $P(\lambda^*)$ es cierta.

Demuestre que $P(\lambda)$ es cierta para todo $\lambda \in I$.
Sugerencia: Proceda por contradicción.