Certamen 2 MAT125

2^{do} Semestre 2015

Prof. Luis Briceño Arias

En el certamen denotaremos $\mathbb{R}_{++} =]0,+\infty[$ y $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. Considere la función $d\colon \mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}_+$ definida por

$$(\forall x,y\in\mathbb{R}_{++})\quad d(x,y) = \left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right|. \tag{1}$$

(10p) *a)* Demuestre que $(\mathbb{R}_{++},d)$ es un espacio métrico.

Definimos la bola abierta de centro $x>0$ y radio $r>0$ en $(\mathbb{R}_{++},d)$ como $B_d(x,r) = \big\{y\in\mathbb{R}_{++} \mid d(x,y)<r\big\}$ y la diferenciamos de la bola abierta usual en $(\mathbb{R}_{++},|\cdot|)$ denotada por $B_{|\cdot|}(x,r) = \big\{y\in\mathbb{R}_{++} \mid |x-y|<r\big\}$.

(10p) *b)* Pruebe que, para todo $x>0$,

$$(\forall\delta>0)\quad B_d(x,\delta)\subseteq B_{|\cdot|}\big(x, x(e^{\delta}-1)\big)\quad \text{y que} \tag{2}$$

$$(\forall 0<\delta<x)\quad B_{|\cdot|}(x,\delta)\subseteq B_d\left(x, \left|\ln\left(1-\frac{\delta}{x}\right)\right|\right). \tag{3}$$

(15p) *c)* Sea $V\subseteq\mathbb{R}_{++}$. Demuestre que V es abierto en $(\mathbb{R}_{++},d)$ si y sólo si V es abierto en $(\mathbb{R}_{++},|\cdot|)$. Qué puede decir de los conjuntos conexos de $(\mathbb{R}_{++},d)$ y de $(\mathbb{R}_{++},|\cdot|)$? y de los conjuntos compactos ?.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}_{++}$ y $x\in\mathbb{R}_{++}$. Denotaremos $x_n \xrightarrow{d} x$ si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en el espacio métrico $(\mathbb{R}_{++},d)$ y lo diferenciaremos de $x_n\to x$ que es la convergencia usual en $(\mathbb{R}_{++},|\cdot|)$

(10p) *d)* Demuestre que $x_n \xrightarrow{d} x$ si y sólo si $x_n\to x$.

(5p) *e)* Demuestre que si la serie $\sum_{n\geq 1} d(x_n,x_{n+1})$ converge entonces $\frac{x_n}{x_{n+1}}\to 1$.

(8p) *f)* Suponga que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Demuestre que $\sum_{n\geq 1} d(x_n,x_{n+1})$ converge sí y sólo si $x_n\to\alpha$ para algún $\alpha>0$. Encuentre el valor de la serie en ese caso. Qué ocurre si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente ?

(15p) *g)* Defina la sucesión

$$a_n = \begin{cases} e^{1/(n-1)}, & \text{si } n \text{ es par;}\\ 1, & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases} \tag{4}$$

1. Pruebe que $\sum_{n\geq 1} d(a_n,a_{n+1}) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n\ln(a_n/a_{n+1})$.
2. Demuestre que $a_n\to 1$, que $\ln(a_n/a_{n+1})\to 0$, pero que la serie $\sum_{n\geq 1} d(a_n,a_{n+1})$ diverge. Por qué no se puede aplicar el criterio de Leibnitz en este caso ?

Sea $f\colon A\subseteq\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}_{++}$ una función. Decimos que f es contínua en $x\in A$ para la topología de $(\mathbb{R}_{++},d)$ si

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall y\in A)\quad d(x,y)<\delta\ \Rightarrow\ d(f(x),f(y))<\varepsilon \tag{5}$$

y la diferenciamos de la continuidad vista en clase, en donde diremos que f es contínua en x para la topología de $(\mathbb{R}_{++},|\cdot|)$. Análogamente, decimos que f es Hölder contínua de exponente $\alpha>0$ en $(\mathbb{R}_{++},d)$ si existe $C>0$ tal que

$$(\forall x,y\in\mathbb{R}_{++})\quad d(f(x),f(y))\leq C d(x,y)^{\alpha}, \tag{6}$$

que también diferenciamos de las funciones Hölder continuas en $(\mathbb{R},|\cdot|)$ vistas en clase.

(10p) *h)* Sea $x\in A$. Demuestre que f es contínua en x para la topología de $(\mathbb{R}_{++},d)$ si y sólo si f es contínua en x para la topología de $(\mathbb{R}_{++},|\cdot|)$.

(7p) *i)* Demuestre que f es es Hölder contínua de exponente $\alpha>0$ en $(\mathbb{R}_{++},d)$ si y sólo si la función $g(x) = \ln(f(e^x))$ es Hölder contínua de exponente $\alpha>0$ en $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

(10p) *j)* Pruebe que $\sqrt{x}$ es contracción estricta en $(\mathbb{R}_{++},d)$, pero que no es Lipschitz en $(\mathbb{R}_{++},|\cdot|)$. Demuestre que $\sqrt{x}$ es Hölder contínua con exponente $1/2$ en $(\mathbb{R}_{++},|\cdot|)$.