UTFSM
Departamento de Matemática.

Prof.: Alberto Mercado Saucedo.
Ayud.: Fernando Roldán.

MAT-125 INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA AVANZADA.
CERTAMEN 2.
VIERNES 18 DE DICIEMBRE
120 MINS.

Problema 1. (30 pts.)

(1) Sea $A \subset \mathbb{R}$ definido por

(1) $$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x < 1\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n^2} \,:\, n \in \mathbb{N}_*\right\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \,:\, -1 \leq x < 0\}$$

Determine los conjuntos $int(A)$, A', $\overline{A}$. (Justificar cada respuesta).

(2) Pruebe o refute: La unión arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Problema 2. (35 pts.)

a) Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto tal que todos sus puntos son **puntos aislados**. Pruebe que K es finito.

b) Proporcione un ejemplo de un conjunto F infinito, cerrado y no acotado, cuyos puntos sean todos aislados. Justificar la respuesta.

c) Proporcione un ejemplo de un conjunto F infinito, acotado y no cerrado, cuyos puntos sean todos aislados. Justificar la respuesta.

Problema 3. (35 pts.)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente (es decir, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$). Pruebe que los **límites laterales** de f existen en todo punto $a \in \mathbb{R}$.
Para esto:

a) Dado $a \in \mathbb{R}$, demuestre que existe $L := \sup\{f(x) \,:\, x < a\} \in \mathbb{R}$.

b) Pruebe que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

c) Demuestre el resultado análogo para el límite por la derecha.

Definiciones.

- Dada $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in X$, decimos que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ (**límite por la izquierda**) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ con $a - \delta < x < a$.
Análogamente, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ (**límite por la derecha**) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ con $a < x < a + \delta$.

- Dados $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A$, se dice que a es un **punto aislado** de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A = \{a\}$.