Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2017

Profesores: E. Cerpa (CS), A. Mercado (CC)
Ayudantes: G. Arias (CS), R. Arancibia (CC)

Certamen 2, MAT-125
Introducción a la Matemática Avanzada

Problema 1 (25 puntos)

Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de intervalos acotados tales que $I_n \supset I_{n+1}$ con $I_n \neq I_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponga que

$$A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Demuestre que el conjunto A es un intervalo y que no es abierto.

Problema 2 (20 puntos)

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ si y sólo si $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{A}$.

Problema 3 (25 puntos)

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, y sean $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas.

(a) Demuestre que si X es abierto entonces el conjunto

$$G = \{x \in X \;:\; f(x) \neq g(x)\}$$

es abierto.

(b) Demuestre que si X es cerrado entonces el conjunto

$$F = \{x \in X \;:\; f(x) = g(x)\}$$

es cerrado.

Problema 4 (30 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Sea $c \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestre que existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$.

(b) Demuestre que $\exists\, \hat{x} \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\hat{x}| = \min\Big\{|x| \;:\; f(x) = c\Big\}.$$

(c) Proporcione dos ejemplos: uno donde $\hat{x}$ sea único y otro donde no lo sea.