Certamen 3 MAT125

2^{do} Semestre 2015

Prof. Luis Briceño Arias

Pregunta 1.

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $]a,b[$ y tales que $f', g' \in \mathcal{R}([a,b], id)$. Demuestre lo siguiente:

(5p) *a)* $(f \cdot g)' \in \mathcal{R}([a,b], id)$.

(10p) *b)* Se satisface la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f g'\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g f'\, dx. \tag{1}$$

Hint: Considere la función $h = (f \cdot g)'$.

(3p) *c)* Si además f y g son crecientes, la fórmula anterior se puede escribir

$$\int_a^b f\, dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g\, df. \tag{2}$$

Pregunta 2.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Sea $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, diferenciable con derivada continua en $[a,b]$, suponga además que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n, f \in \mathcal{R}([a,b], id)$ y defina

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall y \in [a,b]) \quad \varphi_n(y) = \int_a^y f_n d\mu \quad \text{y} \quad \varphi(y) = \int_a^y f d\mu. \tag{3}$$

(10p) *a)* Demuestre que $\mu' \in \mathcal{R}([a,b], id)$ y que $\varphi_n \to \varphi$ puntualmente en $[a,b]$.

(10p) *b)* Demuestre que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y φ son diferenciables y que, para todo $y \in [a,b]$, $\varphi_n'(y) = f_n(y)\mu'(y)$ y $\varphi'(y) = f(y)\mu'(y)$.

(10p) *c)* Demuestre que $\varphi_n' \to \varphi'$ uniformemente en $[a,b]$.

(10p) *d)* Concluya que $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente en $[a,b]$.

(10p) *e)* Demuestre que, para todo $y \in]a,b[$, existe $c \in]a,y[$ tal que $\varphi(y) = f(c)\mu'(c)(y-a)$. Concluya que

$$\lim_{y\to a} \frac{1}{y-a} \int_a^y f d\mu = f(a)\mu'(a).$$

Pregunta 3.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $[0,\pi]$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,\pi]) \quad f_n(x) = \frac{3nx^2 + \sin(nx)}{2n}. \tag{4}$$

(10p) *a)* Demuestre que $f_n \to f$ uniformemente a $f\colon x \mapsto 3x^2/2$ en $[0,\pi]$.

(12p) *b)* Demuestre que si $\mu\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ es una función creciente, diferenciable con derivada continua en $[0,\pi]$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n d\mu = \frac{3\pi^2}{2}\mu(\pi) - 3\int_0^\pi x\mu(x)dx. \tag{5}$$

(10p) *c)* Suponga que $\mu\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ está dada por $\mu(x) = x^2/2$. Calcule $\int_0^\pi f_n d\mu$ y $\int_0^\pi f d\mu$ y compruebe que $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n d\mu = \int_0^\pi f d\mu$.