

MAT-125 INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA AVANZADA.

CERTAMEN 3.

MARTES 19 DE ENERO

150 MINS.

Problema 1. (35 pts.) Considere $f_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1/n}}$

- (1) Determine el límite puntual de $\{f_n\}$ en \mathbb{R} .
- (2) Determine si hay convergencia uniforme en $[-1, 1]$.
Sugerencia: Intentar acotar $|f_n(x) - f(x)|$ por alguna expresión convergente a cero cuando $n \rightarrow \infty$.
- (3) Determine si la sucesión de derivadas $\{f'_n\}$ converge uniformemente en $(-1, 1)$.

Problema 2. (35 pts.)

- a) Determine si la función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x^2)$ es uniformemente continua.
- c) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 3. (30 pts.) Sean f y g dos funciones derivables en \mathbb{R} tales que $f' \leq g'$ en \mathbb{R} , y $f(a) = g(a)$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Probar que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$.

Sugerencia: Aplicar el TVI.