Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2017

Profesores: E. Cerpa (CS), A. Mercado (CC)
Ayudantes: G. Arias (CS), R. Arancibia (CC)

PAUTA Certamen 2, MAT-125
Introducción a la Matemática Avanzada

Problema 1 (25 puntos)

Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de intervalos acotados tales que $I_n \supset I_{n+1}$ con $I_n \neq I_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponga que

$$A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Demuestre que el conjunto A es un intervalo y que no es abierto.

SOLUCIÓN

Por hipótesis $I_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean a_n, b_n los extremos de I_n con $a_n < b_n$.

Por la **hipótesis** $I_n \supset I_{n+1}$ se tiene que $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ para toda n.

Entonces $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada (por b_1, por ejemplo), por lo que existe $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Del mismo modo, $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada (por a_1, por ejemplo), por lo que existe $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Veamos que A es un intervalo de extremos a y b:

- Si $a < x < b$ entonces $a_n < x < b_n$ $\forall n$. Entonces $x \in I_n$ $\forall n$, y por tanto $x \in A$.
- Si $x < a$ entonces existe N tal que $x < a_n$ $\forall n \geq N$. Entonces $x \notin I_N$ y por tanto $x \notin A$.
- Si $b < x$ entonces existe N tal que $b_n < x$ $\forall n \geq N$. Entonces $x \notin I_N$ y por tanto $x \notin A$.

Concluimos que $(a,b) \subset A \subset [a,b]$ y por tanto A es un intervalo con extremos a y b.

Para ver que A no es abierto, usaremos la **hipótesis** $I_n \neq I_{n+1}$. Notemos que dados $a < b$, existen exactamente cuatro intervalos con extremos a y b. Entre ellos se pueden dar solamente dos cadenas de contención propia, cada una de tres intervalos:

$$(a,b) \subset [a,b) \subset [a,b]$$

o bien

$$(a,b) \subset (a,b] \subset [a,b].$$

Por lo tanto, para cada conjunto de cuatro intervalos propiamente contenidos, al menos dos de ellos tienen al menos uno de sus extremos distintos.

Aplicando lo anterior de manera inductiva a nuestra familia $\{I_n\}$, concluimos que existen una cantidad infinita de indices n para los cuales $a_n < a_{n+1}$ o bien $b_n > b_{n+1}$. En particular se debe cumplir una de estas dos opciones para un conjunto infinito de índices.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ tal que

$$a_{n_k} < a_{n_{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Veamos que $a = \lim a_n \in A$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe k tal que $n_k \geq n$ y

$$a_n \leq a_{n_k} < a_{n_{k+1}} \leq a < b \leq b_{n_k},$$

y por tanto $a \in I_{n_k} \subset I_n$. Entonces $a \in A$.

Por lo tanto $A = [a, b)$ o $A = [a, b]$, en ninguno de los casos es abierto. ■

Problema 2 (20 puntos)

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ si y sólo si $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{A}$.

SOLUCIÓN

($\Longrightarrow$) Sea $x \in \overline{A}$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \to x$ (podría ser la sucesión constante si $x \in A$, que es el caso trivial). En todo caso, por hipótesis se tiene $f(x_n) = 0$ para toda n, y como f es continua se sigue que $f(x_n) \to f(x)$ y por tanto $f(x) = 0$.

($\Longleftarrow$) Es consecuencia directa de tener $A \subset \overline{A}$.

■

Problema 3 (25 puntos)

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, y sean $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas.

(a) Demuestre que si X es abierto entonces $G = \{x \in X \, : \, f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

(b) Demuestre que si X es cerrado entonces $F = \{x \in X \, : \, f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

SOLUCIÓN

(a) Sea $x_0 \in G$. Entonces $f(x_0) - g(x_0) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos decir que $(f - g)(x_0) = r > 0$. Como $f - g$ es continua, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$|(f - g)(x) - r| < r$$

para todo $x \in X$ tal que $|x - x_0| < \varepsilon_1$, y en tal caso tendremos que $0 = r - r < (f - g)(x) < 2r$. En particular $(f - g)(x) \neq 0$ para tales x.

Esto prueba que el conjunto $B_{\varepsilon_1}(x_0) \cap X$ está contenido en G. Como X es abierto, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_2}(x_0) \subset G$.

Si tomamos $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, tenemos que $B_\varepsilon(x_0) \subset G$.

Como esto es cierto para cualquier $x_0 \in G$ concluimos que G es abierto.

(b) Sea $\{x_n\} \subset F$ tal que $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Mostraremos que $x \in F$.

En efecto, como $\{x_n\} \subset X$ y X es cerrado, se tiene $x \in X$.

Por otra parte, se tiene $f(x_n) = g(x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como f y g son continuas tenemos $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(x)$.

Por lo tanto $x \in F$, lo cual demuestra que F es cerrado.

■

Problema 4 (30 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Sea $c \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestre que existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$.

(b) Demuestre que $\exists\, \hat{x} \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\hat{x}| = \min\Big\{|x| \,:\, f(x) = c\Big\}.$$

(c) Proporcione dos ejemplos: uno donde $\hat{x}$ sea único y otro donde no lo sea.

SOLUCIÓN

(a) Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq c - 1$ para toda $x \leq a$.

Por otra parte, como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ tenemos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq c + 1$ para toda $x \geq b$.

Entonces tenemos

$$a < b$$

y

$$f(a) < c < f(b).$$

Por el TVI, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

(b) Por lo probado en el inciso (a), temos que

$$K := \Big\{x \,:\, f(x) = c\Big\} \subset [a, b],$$

y por tanto el conjunto K es acotado. Además, si $x_n \to x$ con $f(x_n) = c$, por ser f continua se tiene que $f(x) = \lim f(x_n) = c$, y por tanto tal conjunto es también cerrado. Entonces es compacto.

La función $h(x) = |x|$ es continua, por lo que alcanza un mínimo en el compacto K

Es decir, existe $\hat{x} \in K$ tal que $|\hat{x}| = \min\Big\{|x| \,:\, f(x) = c\Big\}$.

(c) Mostraremos dos ejemplos donde K tiene varios elementos:

- Si $f(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ y $c = 0$ entonces $K = \{-1, 0, 1\}$, por lo que $\hat{x} = 0$ es único.
- Si $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$ y $c = 0$ entonces $K = \{-1, 1, 2\}$, por lo que $\hat{x}$ no es único (puede ser $\hat{x} = -1$ o $\hat{x} = 1$, en ambos casos $|\hat{x}| = 1 = \min |K|$).

$\blacksquare$