Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2017

Profesores: E. Cerpa (CS), A. Mercado (CC)
Ayudantes: G. Arias (CS), R. Arancibia (CC)

PAUTA Certamen 1, MAT-125
Introducción a la Matemática Avanzada

Problema 1 (25 puntos)

(a) En clases vimos que todo conjunto $A \subset \mathbb{N}$, no vacío, tiene un primer elemento, es decir, existe $\hat{a} \in A$ tal que $\hat{a} \leq a$, $\forall a \in A$. Use esto para demostrar el Principio de Inducción Fuerte:
Sea $P(n)$ una proposición formulada para cada elemento $n \in \mathbb{N}$. Si

(i) $P(1)$ es verdadera, y

(ii) $\Big(P(k) \text{ es verdadera } \forall k \in \{1, 2, \cdots n\}\Big) \implies \Big(P(n+1) \text{ es verdadera}\Big)$,

entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pruebe que todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, posee algun factor primo.

Solución:

(a) Por contradiccón, supongamos que $P(n)$ no es siempre verdadera. Es decir, existen algunos $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$ es falsa. Definamos $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, P(n) \text{ es falsa }\}$. Por hipótesis, existe un primer elemento de A, que denotamos por n_0.
Por (i) tenemos $n_0 \geq 2$. Por ser n_0 el primer elemento, tenemos que $P(n)$ es cierta para $n < n_0$.
Por (ii) tenemos entonces que $P(n_0)$ es cierta, lo cual es una contradicción.
Luego, $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Consideremos $P(n) = n$ posee algún factor primo. Usaremos el Principio de Inducción Fuerte. La propiedad es cierta para $n = 2$ ya que es primo.
Supongamos que $P(2), \cdots, P(n)$ son ciertas. Queremos demonstrar que $P(n+1)$ es cierta.
Si $n+1$ es primo, entonces $P(n+1)$ es cierta.
Si $n+1$ no es primo, entonces se puede escribir como la multiplicación de dos enteros menores a $n+1$, es decir, $n+1 = d \cdot q$, con $d \in [2, n]$. Por hipótesis d posee un factor primo, de donde $n+1$ también.
Luego, se concluye que $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 2$.

Problema 2 (25 puntos) Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos tales que $\forall a \in X$, $\forall b \in Y$, se tiene que $a \leq b$. Pruebe que

(a) $\sup X$ e $\inf Y$ existen, y que además $\sup X \leq \inf Y$.

(b) $\sup X = \inf Y \iff \forall\, c > 0$, $\exists\, a \in X$, $\exists\, b \in Y$, tales que $(b - a) < c$.

Solución:

(a) Como X, Y son no vacíos, existe $b_0 \in Y$ que, por hipótesis, es cota superior de X. Así, X es no vacío y acotado superiormente. Luego, existe $\sup X$.
Análogamente, Y es no vacío y acotado inferiormente. Luego, existe $\inf Y$.
Por hipótesis, todo $b \in Y$ es cota superior de X y como $\sup X$ es la menor de las cotas superiores de X, se tiene $\sup X \leq b$ para todo $b \in Y$. Luego, $\sup X$ es una cota inferior de Y y entonces $\sup X \leq \inf Y$.

(b) Denotemos $x = \sup X$, $y = \inf y$. Así tenemos que $x \leq y$.
($\Rightarrow$) Sea $c > 0$. Sabemos que existe $a \in X$ tal que $x - a < c/2$ y que existe $b \in Y$ tal que $b - y < c/2$.
Si $x = y$, entonces $b - a = b - y + x - a < c$.

($\Leftarrow$) Demostraremos la contrarrecíproca. Supongamos que $x < y$. Veremos que existe $c > 0$ que no cumple la propiedad.
Como $x < y$ tenemos que $a \leq x < y \leq b$ para todo $a \in X$ y para todo $b \in Y$.
Sea $c = y - x > 0$. Vemos que $b - a \geq y - x = c$, es decir, $b - a \geq c$ para todo $a \in X$ y para todo $b \in Y$.

Problema 3 (25 puntos)

(a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente. Pruebe que si esta posee alguna subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(b) Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty$. (Recuerde que $\forall x > 0$, $\ln(x) < x$, y considere $\ln(2^n)$.)

(c) Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. (Sugerencia: Considerar $\ln(\sqrt{n})$.)

Solución:

(a) Sea $M > 0$. Por hipótesis, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_k} \geq M$ para todo $k \geq k_0$.
Si $n_0 = n_{k_0}$, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente tendremos que $a_n \geq a_{n_0} \geq M$ para todo $n \geq n_0$. Esto es lo que debíamos mostrar.

(b) La sucesión $a_n = \ln(n)$ es creciente (pues la función ln lo es). Si $n_k = 2^k$ tenemos que $a_{n_k} = \ln(2^k) = k\ln(2)$ que tiene límite ∞.
Por parte (a) tenemos que $a_n \to \infty$.

(c) Sabemos que $\ln(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\ln(n)$ y luego (como $\ln(x) < x$)

$$0 \leq \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{2\ln(\sqrt{n})}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n}$$

$$0 \leq \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Como $\frac{2}{\sqrt{n}}$ tiende a 0, podemos concluir por Teorema del Sandwich que $\frac{\ln(n)}{n}$ converge a 0.

Problema 4 (25 puntos) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Muestre que exactamente una de las siguientes afirmaciones es correcta:

P1: $x_n \to 0$.

P2: $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, tales que $\forall\, n \geq N,\ x_n > \varepsilon$.

P3: $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, tales que $\forall\, n \geq N,\ x_n < -\varepsilon$.

Solución:

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy sabemos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to L$. Tenemos entonces 3 casos excluyente:

- $L = 0$. Es equivalente a P1.
- $L > 0$. Tomando $\varepsilon = L/2$ en la definición de límite vemos que existe N tal que $x_n \in (L/2, 3L/2)$ para todo $n \geq N$. En particular, $x_n > L/2 = \varepsilon$. Por tanto se tiene P2.
- $L < 0$. Tomando $\varepsilon = -L/2$ en la definición de límite vemos que existe N tal que $x_n \in (3L/2, L/2)$ para todo $n \geq N$. En particular, $x_n < L/2 = -\varepsilon$. Por tanto se tiene P3.

En particular P1 (equivalente a $L > 0$) es excluyente con cada una P2 y P3. Si estás dos últimas fueran ciertas, tomando N como el mayor de los dos números naturales de sus definiciones, tendríamos $x_N > 0$ y $x_N < 0$, lo cual es una contradicción.

Por tanto las tres propiedades son excluyentes.