Universidad Técnica Federico Santa María **MAT125**
Departamento de Matemática **Introducción a la Matemática Avanzada**

Tarea 1 2017-2		
Profesores:	Alberto Mercado - Eduardo Cerpa	
Ayudantes:	Rogelio Arancibia - Gonzalo Arias	*Sea ordenado y limpio;*
Fecha de Entrega:	Miércoles 11 de Octubre en clases	*Justifique sus pasos.*

Problema 1. Sea $X \subset \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío tal que $m, n \in X \iff m, m+n \in X$. Pruebe que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que X es el conjunto de los múltiplos de k.

Problema 2. Sea $\mathcal{F}(X;Y)$ el conjunto de las funciones $f : X \longrightarrow Y$. Si $\operatorname{Card}(X) = m$ y $\operatorname{Card}(Y) = n$, pruebe que $\operatorname{Card}(\mathcal{F}(X;Y)) = n^m$.

Problema 3. Dé un ejemplo de una sucesión decreciente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos infinitos cuya intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ sea vacía.

Problema 4. Pruebe que existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobreyectiva tal que $g^{-1}(n)$ es infinito para cada $n \in \mathbb{N}$.

Problema 5. Pruebe que $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + \cdots + x^n$ para todo $x \neq 1$.

Problema 6. Pruebe que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Problema 7. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ con $a^2 < 2 < b^2$, tome $x, y \in \mathbb{R}^+$ tales que $x < 1$, $x < \left(2 - a^2\right) / (2a + 1)$ e $y < \left(b^2 - 2\right)/2b$. Pruebe que $(a + x)^2 < 2 < (b - y)^2$ y $(b - y) > 0$. A continuación, considere el conjunto acotado $X = \left\{a \in \mathbb{R}^+ \ : \ a^2 < 2\right\}$ y concluya que el número real $c = \sup X$ cumple con $c^2 = 2$.

Problema 8. Se dice que una sucesión (x_n) es periódica cuando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+p} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que toda sucesión periódica convergente es constante.

Problema 9. Si una sucesión monótona tiene una subsucesión convergente, pruebe que entonces la propia sucesión es convergente.

Problema 10. Sean $\lim x_n = a$ y $\lim y_n = b$. Pruebe que si $a < b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0 \Longrightarrow x_n < y_n$.

Problema 11. ¿Cuáles son los valores de adherencia de la sucesión (x_n) definida por $x_{2n-1} = n$ y $x_{2n} = 1/n$?. ¿Es esta sucesión convergente?.

Problema 12. Defina la sucesión (a_n) inductivamente como $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escriba $x_n = a_n/a_{n+1}$ y pruebe que $\lim x_n = a$, donde a es el único número positivo tal que $1/(a + 1) = a$. El término a_n se llama $n-$ésimo *número de Fibonacci.* Y $a = \left(-1 + \sqrt{5}\right)/2$ es el *número de oro* de la Geometría Clásica.

Problema 13. Si $\lim x_n = a$ y (t_n) es una sucesión de números positivos tal que

$$\lim\,(t_1 + \ldots + t_n) = +\infty,$$

entonces pruebe que:

$$\lim \frac{t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n}{t_1 + \ldots + t_n} = a.$$

En particular, si $y_n = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, también se tiene que $\lim y_n = a$.