Tarea 2 2017-2
Profesores: Alberto Mercado - Eduardo Cerpa
Ayudantes: Rogelio Arancibia - Gonzalo Arias
Fecha de Entrega: Miércoles 22 de noviembre en clases

*Sea ordenado y limpio; Justifique sus pasos.*

**Problema 1.** Pruebe que para todo $X \subset \mathbb{R}$ se tiene $\mathbb{R} \setminus \text{int}(X) = \overline{\mathbb{R} \setminus X}$ y $\mathbb{R} \setminus \overline{X} = \text{int}(\mathbb{R} \setminus X)$.

**Problema 2.** Definimos la frontera de un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ como $\text{fr}(X) = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus X}$. Determine la frontera de cada uno de los siguientes conjuntos: $\mathbb{N}, (0,1), Q, (0,2) \cap (2,4)$. Pruebe que $X \subset \mathbb{R}$ tiene frontera vacía si y solo si $X = \emptyset$ o $X = \mathbb{R}$.

**Problema 3.** Pruebe que para todo $X \subset \mathbb{R}$, se tiene que $X'$ es un cojunto cerrado.

**Problema 4.** Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $a \in X'$. Demuestre que existe una sucesión, ya sea estrictamente creciente, o estrictamente decreciente, de puntos $\{x_n\} \subset X$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

**Problema 5.** Pruebe que la unión finita y la intersección arbitraria de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

**Problema 6.** Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Demuestre cada uno de los siguientes conjuntos es compacto:

a) $S = \{x + y \,:\, x, y \in X\}$

b) $D = \{x - y \,:\, x, y \in X\}$

c) $P = \{xy \,:\, x, y \in X\}$

d) $C = \{x/y \,:\, x, y \in X\}$, suponiendo $0 \notin X$.

**Problema 7.** Sean $f : X \to \mathbb{R}$ una función, $a \in X'$ y definimos $R = f(X \setminus \{a\})$. Demuestre que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ entonces $L \in \overline{R}$.

**Problema 8.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada $t \in \mathbb{R}$ defnimos

$$M(t) = \sup\{f(x) \,:\, x \geq t\}, \quad \text{y} \quad m(t) = \inf\{f(x) \,:\, x \geq t\}.$$

Entonces denotamos la *oscilación* de $f$ en $[t, \infty]$ por $w(t) = M(t) - m(t)$. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Existen $\lim\limits_{t \to +\infty} M(t)$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} m(t)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe si y solo si $\lim\limits_{t \to +\infty} w(t) = 0$.

**Problema 9.** Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto. Demuestre que si $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$.

**Problema 10.** Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que si $f$ es continua si y solo si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.

**Problema 11.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Demuestre que $f$ alcanza un mínimo, es decir existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**Problema 12.** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice periódica si existe $p \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que toda función continua periódica es acotada y alcanza su mínimo y su máximo.