Tarea 3 2017-2
Profesores: Alberto Mercado - Eduardo Cerpa
Ayudantes: Rogelio Arancibia - Gonzalo Arias
Fecha de Entrega: VIERNES 22 de diciembre

Sea ordenado y limpio;
Justifique sus pasos.

Problema 1. Sean $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X$. Si f y h son derivables en $a \in X \cap X'$ con $f(a) = h(a)$ y $f'(a) = h'(a)$, demuestre que g es derivable en a y $g'(a) = f'(a)$.

Problema 2. Sea I un intervalo. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice de clase C^2 cuando es derivable y f' es de clase C^1. Si f es de clase C^2 con $f(I) = J$ y $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, demuestre que f es invertible, que f^{-1} es de clase C^2 y calcule la segunda derivada de $f^{-1} : J \longrightarrow I$.

Problema 3. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en el intervalo abierto I. Un punto crítico $c \in I$ se llama no degenerado cuando $f''(c) \neq 0$. Pruebe que todo punto crítico no degenerado es un punto máximo local o mínimo local.

Problema 4. Sea $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = xe^{-nx}$. Demuestre que f_n converge uniformemente y determine su límite.

Problema 5. Sea $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \dfrac{n}{x^4 + nx^2 + 1}$. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Problema 6. Sea r el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_n a_n x^n$. Pruebe que si $r > 0$, entonces $r = 1/L$, donde L es el mayor valor de adherencia de la sucesión acotada $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n\in\mathbb{N}}$.